

LAHENDUSED JA HINDAMINE

1. Vastus: 5 tundi.

Lahendus. Olgu teepikkus $|AB| = s$, v_j - jalakäija kiirus ja v_r - jalgratturi kiirus.

Jalgrattur ja jalakäija kohtuvad $\frac{5}{6}$ tunni pärast, seega

$$\frac{s}{v_j + v_r} = \frac{5}{6}.$$

Jalgratturil kulub vahemaa läbimiseks 4 tundi vähem aega, seega

$$\frac{s}{v_j} - \frac{s}{v_r} = 4.$$

Niisiis saame võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \frac{v_j + v_r}{s} = \frac{6}{5} \\ \frac{s}{v_j} - \frac{s}{v_r} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_j}{s} + \frac{v_r}{s} = \frac{6}{5} \\ \frac{s}{v_j} - \frac{s}{v_r} = 4 \end{cases}.$$

Teeme asendused $\frac{s}{v_j} = x$ ja $\frac{s}{v_r} = y$ ning lahendame süsteemi asendusvõtte abil.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{5} \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Teisest võrrandist avaldame $x = y + 4$ ning asendame esimesse võrrandisse.

$$\frac{1}{y+4} + \frac{1}{y} = \frac{6}{5} \quad | \cdot 5y(y+4)$$

$$5y + 5(y+4) = 6y(y+4)$$

$$5y + 5y + 20 = 6y^2 + 24y$$

$$6y^2 + 14y - 20 = 0 \quad | : 2$$

$$3y^2 + 7y - 10 = 0$$

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6} = \frac{-7 \pm 13}{6} = 1 \text{ (negatiivne lahend ei sobi)}$$

Niisiis $\frac{s}{v_j} = x = y + 4 = 1 + 4 = 5$.

Jalakäijal kulub punktist A punkti B jõudmiseks 5 tundi.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

2. Vastus: $a = 7, b = 5$ ja $c = 0$.

Lahendus. Et $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 3 \cdot 10 \cdot 67$, siis $\overline{ac3bc} : 10$ ning arvestades 10-ga jaguvuse tunnust peab arv N viimane number olema 0. Niisiis $c = 0$ ning arv N avaldub kujul $N = \overline{a03b0}$.

Edasi kasutame 3-ga jaguvuse tunnust. Et numbrite summa $a + 0 + 3 + b + 0$ peab jaguma 3-ga, siis $(a + b) : 3$. Ülesande tingimuste kohaselt olid a ja b algarvud, seega on järgnevad võimalused:

- 1) $a = 7$ ja $b = 2$
- 2) $a = 2$ ja $b = 7$
- 3) $a = 7$ ja $b = 5$
- 4) $a = 5$ ja $b = 7$

Viimaks kontrollime ka 67-ga jaguvust. Et lihtne jaguvuse tunnus siin puudub, siis jagame kirjalikult

- | | | |
|----------------------------------|---------------|----------------|
| 1) $70320 : 67 = 1049$, jääk 37 | \Rightarrow | $N \neq 70320$ |
| 2) $20370 : 67 = 304$, jääk 2 | \Rightarrow | $N \neq 20370$ |
| 3) $70350 : 67 = 1050$ | \Rightarrow | $N = 70350$ |
| 4) $50370 : 67 = 751$, jääk 53 | \Rightarrow | $N \neq 50370$ |

Kontrollime tulemust algkujul $70350 : 2010 = 35$
 $N = 70350$

LAHENDUSED JA HINDAMINE

3. Vastus: $c < 0$.

Lahendus. Et ruutvõrrandil on kaks võrdset lahendit, siis diskriminant

$$D = b^2 - 4ac = 0,$$

millest

$$b^2 = 4ac.$$

1) Et $a \neq 0$, siis kehtib $b = 0$ parajasti siis, kui $c = 0$. Juhul $c = 0$ saab võrrand kuju $ax^2 = 0$. Selle võrrandi lahendid on $x_{1,2} = 0$, mis aga pole positiivsed. Saime vastuolu ülesande tingimustega.

Niisiis $b \neq 0$ ja $c \neq 0$ ning $b^2 = 4ac > 0$. Viimasest ilmneb, et arvud a ja c on sama märgiga.

2) Kui $c > 0$ ja $a > 0$, siis arvestades tingimust $a + b + c < 0$ saame, et

$$-b < -(a + c) < 0,$$

millest

$$a + c < -b.$$

Saadud võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, seega võime pooled ruutu tõsta.

$$a^2 + 2ac + c^2 < b^2$$

Kuna $b^2 = 4ac$, siis

$$a^2 - 2ac + c^2 < 0$$

$$(a - c)^2 < 0$$

Ruut ei saa aga olla negatiivne.

Niisiis jääb vaid võimalus, et $c < 0$.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

4. Vastus: $S = 246$.

Lahendus. Teeme abistava joonise.

Kahe paralleelse sirge AB ja CD lõikamisel kolmanda sirgega BD tekib paar võrdsed põiknurki.

Niisiis

$$\angle DBA = \angle CDB.$$

Ülesande tingimuste kohaselt

$$\angle BCD = \angle ADB = 90^\circ.$$

Järelikult on kolmnurgad ABD ja DBC vastavalt tunnusele NN sarnased. Et sarnaste kolmnurkade vastavate külgede suhted on võrdsed, siis

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Siit

$$|BD|^2 = |AB| \cdot |CD| = 400,$$

kust

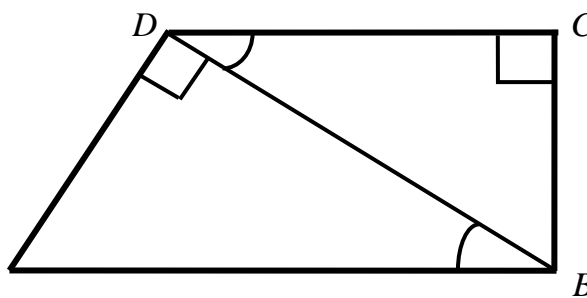
$$|BD| = 20.$$

Täisnurksest kolmnurgast BCD vastavalt Pythagorase teoreemile

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 - |CD|^2} = 12.$$

Trapetsi pindala on seega

$$S = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |BC| = 246.$$

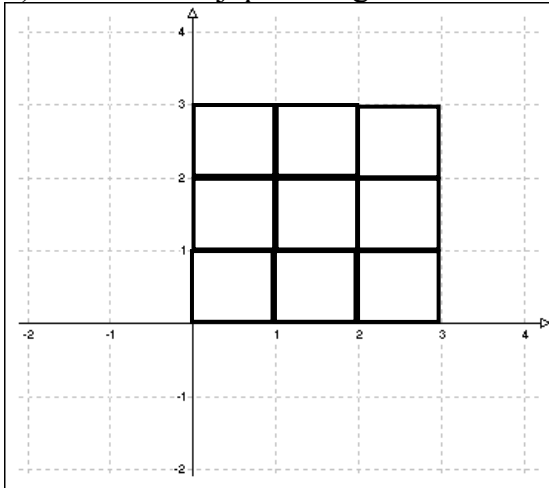


LAHENDUSED JA HINDAMINE

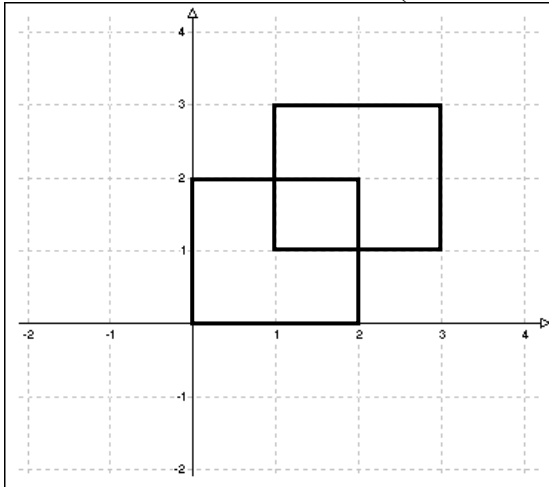
5. Vastus: 20.

Lahendus.

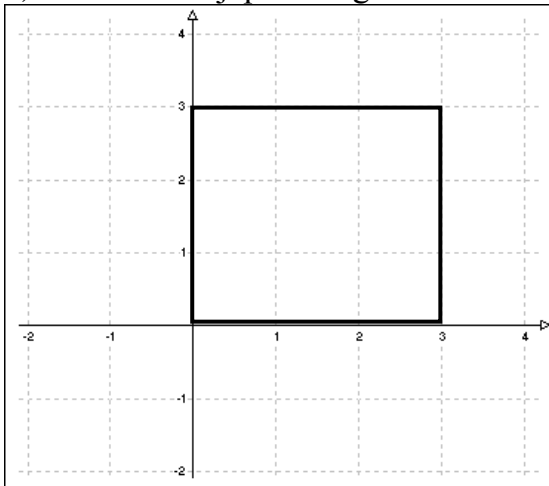
1) Ruutused küljepikkusega 1 ühik on 9 (vt joonist).



2) Ruutused küljepikkusega 2 ühikut on 4 (vt joonist). Joonisele saab kanda veel kaks sellist 2×2 ruutu (vasakule üles ja paremale alla).

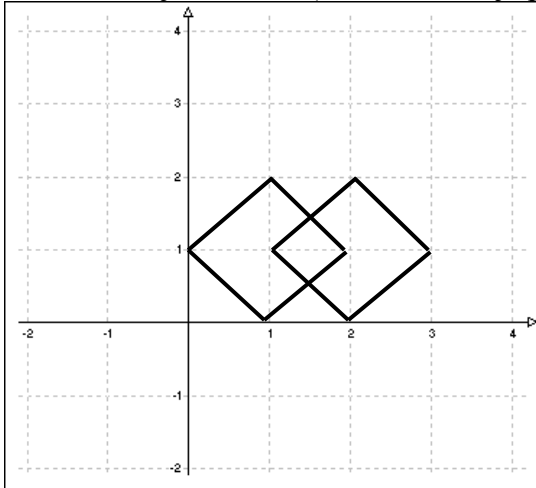


3) Ruutused küljepikkusega 3 ühikut on vaid 1.

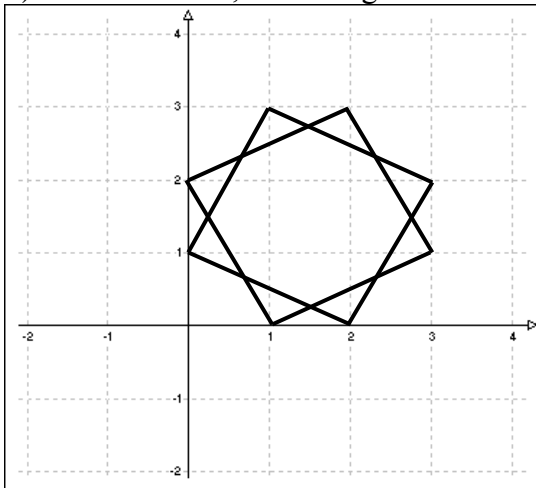


LAHENDUSED JA HINDAMINE

4) Leidub 4 ruutu, mille külg on 1×1 ruudu diagonaal. Joonisele saab veel kaks sellist ruutu joonestada (vasakule üles ja paremale üles).



5) Leidub 2 ruutu, mille külg on 1×2 ristküliku diagonaal.



Kokku seega leidub $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ erinevat ruutu.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

HINDAMINE

- | | |
|--|-----------|
| 1. Muutujate valiku eest | 1p |
| Jalakäija ja jalgratturi kohtumise abil saadud võrrandi eest | 2p |
| 4 tunnise ajavahe abil saadud võrrandi eest | 1p |
| Lahenduse tehnilise lõpuleviimise eest | 1p |
| Õige vastuse eest | 1p |
| | <hr/> |
| | 7p |
| 2. Kümne jaguvuse kasutamise ja numbriga c kindlakstegemise eest | 2p |
| Kolme jaguvuse kasutamise ja numbrite a ja b kindlakstegemise eest | 3p |
| Lahenduse lõpuleviimise eest | 2p |
| <u>Märkus.</u> Otse loomulikult ei pea lahenduse viimases faasis sooritama jagamist 67ga. Et variante on vaid 4, siis võib jagada ka 2010 või 201ga. | <hr/> |
| | 7p |
| 3. Seoseni $b^2 = 4ac$ jõudmise eest | 2p |
| Võimaluse $c = 0$ põhjendusega väljapraakimise eest | 1p |
| Võimaluse $c > 0$ põhjendusega väljapraakimise eest | 3p |
| Õige vastuse eest | 1p |
| | <hr/> |
| | 7p |
| 4. Korrektse abijoonise eest | 1p |
| Kolmnurkade ABD ja DBC sarnasuse näitamise eest | 2p |
| Õige külgede suhte väljakirjutamise eest | 1p |
| Diagonaali pikkuse leidmise eest | 1p |
| Külje BD (kõrguse) pikkuse leidmise eest | 1p |
| Pindala leidmise eest | 1p |
| <u>Märkus.</u> Lõigu pikkust ei pea tähistama püstkriipsude abil. | <hr/> |
| | 7p |
| 5. 1×1 ruutude õige arvu eest | 1p |
| 2×2 ruutude õige arvu eest | 1p |
| 3×3 ruutude õige arvu eest | 1p |
| Ruutude, mille külge on 1×1 ruudu diagonaal, õige arvu eest | 1p |
| Ruutude, mille külge on 1×2 ristküliku diagonaal, õige arvu eest | 2p |
| Õige vastuse eest | 1p |
| <u>Märkus.</u> Kui õpilane ei illustreeri arve joonistega, siis panna täielikult õige lahenduse eest 4p. Kui puudub mõni joonistest, siis 5p. | <hr/> |
| | 7p |